Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Yves Schneider

Universität Luzern

Frühjahr 2016

Repetition Kapitel 1 bis 3

Funktionen einer Variablen (Kapitel 4)

Repetition Kapitel 1 bis 3

Ausgewählte Themen Kapitel 1

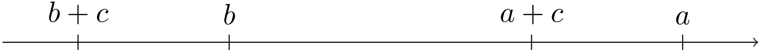
Ausgewählte Themen Kapitel 2 (Gleichungen lösen)

Ausgewählte Themen aus Kapitel 3

Repetition Kapitel 1 bis 3

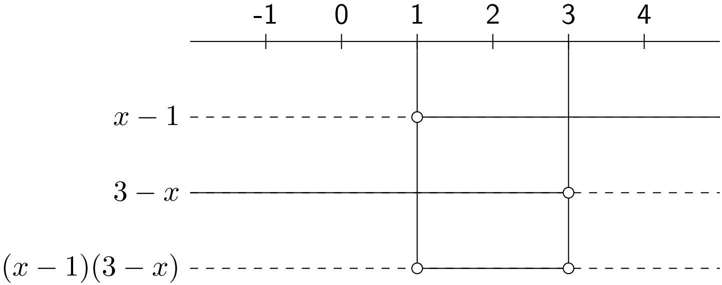
- Ausgewählte Themen Kapitel 1
- Ausgewählte Themen Kapitel 2 (Gleichungen lösen)
- Ausgewählte Themen aus Kapitel 3

- Wenn $a > b$, dann ist $a + c > b + c$ für alle c:



- Wenn $a > b$ und $b > c$, dann ist $a > c$
- Wenn $a > b$ und $c > 0$, dann ist $ac > bc$
- Wenn $a > b$ und $c < 0$, dann ist $ac < bc$
- Beachte Richtungsänderung der Ungleichung!
- Wenn $a > b$ und $c > d$, dann ist $a + c > b + d$
- Dasselbe gilt für $\geq$ statt $>$.

- Für welche Werte von x gilt: $(x-1)(3-x) > 0$?



- Die Ungleichung gilt für $1 < x < 3$.

Repetition Kapitel 1 bis 3

Repetition Kapitel 1 bis 3

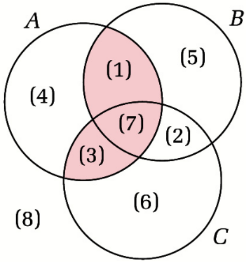
Ausgewählte Themen Kapitel 1

Ausgewählte Themen Kapitel 2 (Gleichungen lösen)

Ausgewählte Themen aus Kapitel 3

Ausgewählte Themen aus Kapitel 3

Repetition Kapitel 1 bis 3



(1) $\left(\boldsymbol{A}\bigcap\boldsymbol{B}\right)\setminus\boldsymbol{C}$ (2) $\left(\boldsymbol{B}\bigcap\boldsymbol{C}\right)\setminus\boldsymbol{A}$ (3) $\left(\boldsymbol{C}\bigcap\boldsymbol{A}\right)\setminus\boldsymbol{B}$

(4) $\boldsymbol{A}\setminus\left(\boldsymbol{B}\bigcup\boldsymbol{C}\right)$ (5) $\boldsymbol{B}\setminus\left(\boldsymbol{C}\bigcup\boldsymbol{A}\right)$ (6) $\boldsymbol{C}\setminus\left(\boldsymbol{A}\bigcup\boldsymbol{B}\right)$

(7) $\boldsymbol{A}\bigcap\boldsymbol{B}\bigcap\boldsymbol{C}$ (8) $\boldsymbol{\mathcal{C}}\left(\boldsymbol{A}\bigcup\boldsymbol{B}\bigcup\boldsymbol{C}\right)$

Funktionen einer Variablen (Kapitel 4)

Funktionen einer Variablen (Kapitel 4)

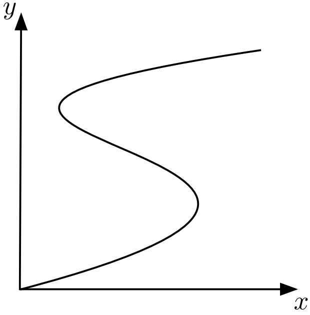
Funktionen einer Variablen (Kapitel 4)

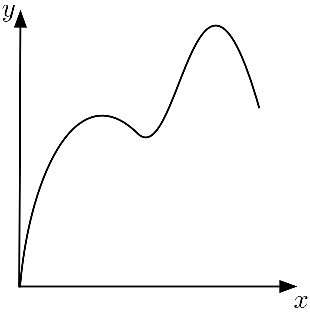
Grundlegende Definitionen

Funktionen einer Variablen (Kapitel 4)

Definition (Funktion)

Eine Funktion ist eine Relation, die einem Element einer Menge genau ein Element einer anderen Menge zuordnet.



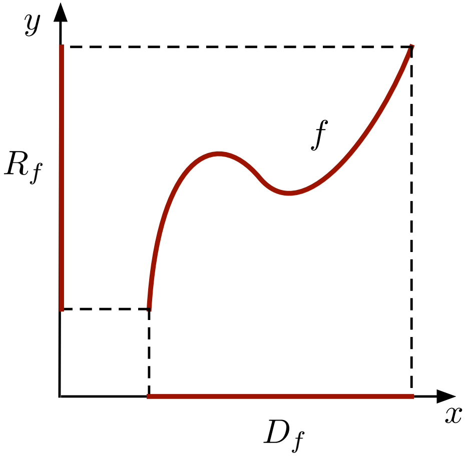


Die Funktion f ist eine **Abbildung** von einer Menge D in eine andere Menge R. Wir schreiben $f : D \to R$. D ist die **Definitionsbereich** und R der **Wertebereich** der Abbildung. Wird ein Punkt x aus der Definitionsbereich auf einen Punkt y im Wertebereich abgebildet, schreibt man $y = f(x)$.

$f(x)$ ist der Funktionswert an der Stelle x.

Veranschaulichung Definitionsbereich (D_f) und Wertebereich (R_f)

Funktionen einer Variablen (Kapitel 4)



Zwei Beispiele:

Funktionen einer Variablen (Kapitel 4)

1. $f(x) = \frac{1}{3+x}$
   Definitionsbereich: alle reellen Zahlen mit Ausnahme von -3:
   $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$

2. $g(x) = \sqrt{2x+4}$
   Definitionsbereich: $[-2, \infty)$

Grundlegende Definitionen

Funktionen einer Variablen (Kapitel 4)

Definition

$f : D \to R$ ist eine reellwertige Funktion, falls D eine beliebige Menge ist und $R \subset \mathbb{R}$.

Montone Funktionen

Funktionen einer Variablen (Kapitel 4)

Definition (Monoton wachsende Funktion)

Die Funktion f ist *monoton wachsend*, falls
$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$.

Definition (Strikt monoton wachsende Funktion)

Die Funktion f ist *strikt monoton wachsend*, falls
$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$.

Jede strikt monoton steigende Funktion ist auch monoton steigend. Die Umkehrung gilt nicht.

Funktionen einer Variablen (Kapitel 4)

Graphen von Funktionen

Funktionen einer Variablen (Kapitel 4)

Jede Funktion einer Variable kann durch einen Graphen in einem rechtwinkligen Koordinatensystem dargestellt werden.

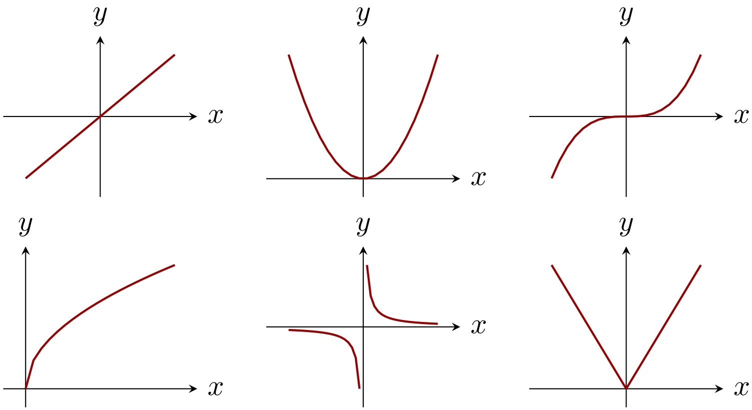
Definition (Graph)

Der Graph einer Funktion ist die Menge aller Punkte $(x, f(x))$, wobei x zum Defintionsbereich D_f der Funktion f gehört:

$$\text{graph}(f) := \{(x, f(x)) \,|\, x \in D_f\}$$

Graphen von einigen wichtigen Funktionen

Funktionen einer Variablen (Kapitel 4)



Funktionen einer Variablen (Kapitel 4)

$$f(x) = ax + b$$

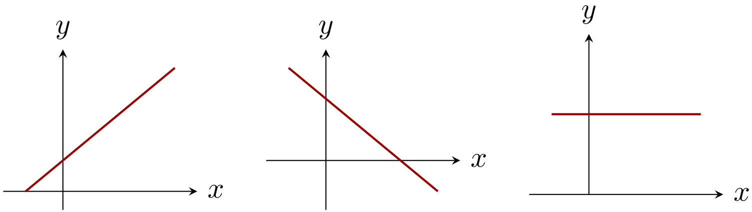
Der Parameter b ist der Achsenabschnitt.

Der Parameter a entspricht der Steigung der Funktion:

- $a > 0$: Gerade steigt mit wachsendem x. Je grösser a, desto steiler die Gerade
- $a < 0$: Gerade fällt mit wachsendem x. Je kleiner a, desto steiler fällt die Gerade.
- $a = 0$: Die Gerade ist parallel zur x-Achse.

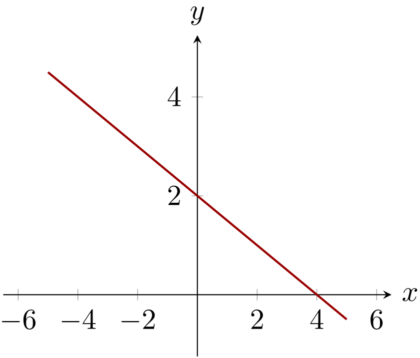
Lineare Funktionen und lineare Modelle

Funktionen einer Variablen (Kapitel 4)



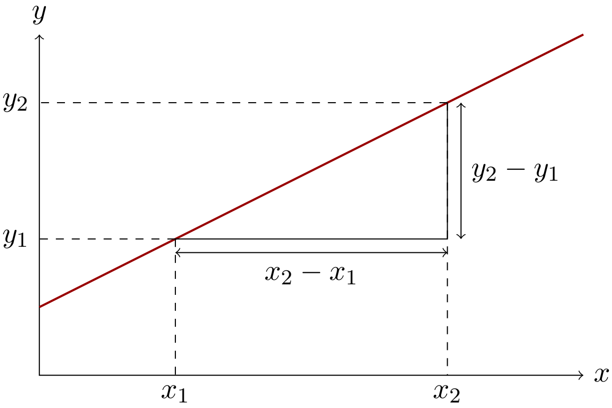
$f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$

Funktionen einer Variablen (Kapitel 4)



Lineare Funktionen und lineare Modelle

Funktionen einer Variablen (Kapitel 4)

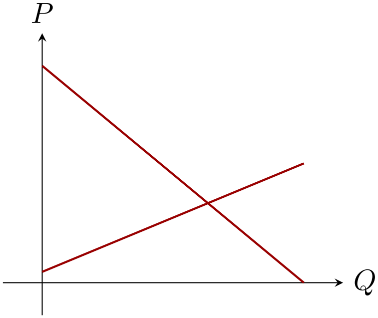


Die Steigung der Geraden beträgt $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ für $x_2 \neq x_1$.

Anwendung: Gesucht ist die Gleichung einer Geraden mit Steigung a durch den Punkt (x_1, y_1).

Gleichgewicht bei linearer Angebots- und Nachfragefunktion

- Nachfrage: $D(P) = 100 - P$
- Angeobt: $S(P) = 10 + 2P$
- $P^* = 30$, $Q^* = 70$



Schnittpunkt zweier lineare Funktionen bestimmen

Funktionen einer Variablen (Kapitel 4)

Bestimme den Schnittpunkt zwischen

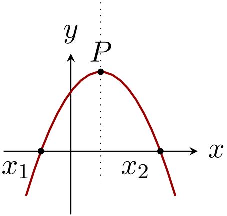
$$f(x) = a - bx \qquad \text{und} \qquad g(x) = \alpha + \beta x,$$

wobei $a > 0$, $b > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

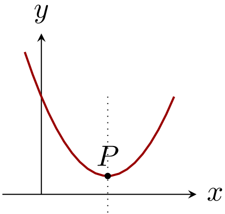
Funktionen einer Variablen (Kapitel 4)

$f(x) = ax^2 + bx + c$

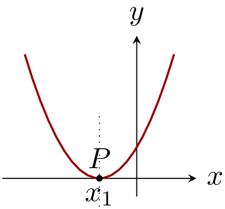
Funktionen einer Variablen (Kapitel 4)



$f(x) = -2x^2 + 4x + 6$
$f(x) = -2(x+1)(x-3)$



$g(x) = x^2 - 4x + 3$
$g(x) = (x-2)^2 + 1$



$h(x) = (x+1)^2$
$h(x) = x^2 + 2x + 1$

Quadratische Funktionen

Funktionen einer Variablen (Kapitel 4)

Falls x_1 und x_2 Nullstellen der quadratischen Gleichung sind, dann gilt:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Quadratische Erweiterung:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

- nur $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ hängt von x ab
- $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = b/2a$
- $f(x)$ hat für $a > 0$ ein Minimum bei $x = -b/2a$
- $f(x)$ hat für $a < 0$ ein Maximum bei $x = -b/2a$

Quadratische Funktionen

Funktionen einer Variablen (Kapitel 4)

Mit der quadratischen Erweiterung

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

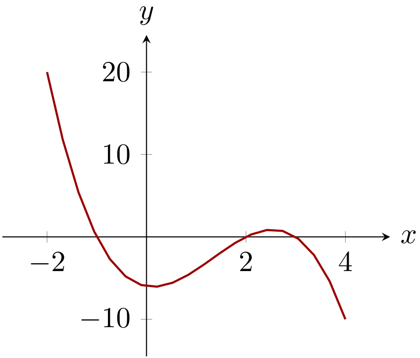
finden wir die Nullstellen, also diejenigen x_i für welche $f(x_i) = 0$ gilt:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Funktionen einer Variablen (Kapitel 4)

Eine kubische Funktion:

$$f(x) = -x^3 + 4x^2 - x - 6$$



Allgemeines Polynom vom Grad n:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

wobei $a_n \neq 0$.

Ein Polynom n-ten Grades hat höchstens n Nullstellen.

Theorem (Fundamentalsatz der Algebra)

Jedes Polynom kann als Produkt von Polynomen erster und zweiter Ordnung (d.h. als Produkt von linearen und quadratischen Funktionen) geschrieben werden.

Theorem (ganzzahlige Lösungen)

Nehmen Sie an, dass $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ *alle ganze Zahlen sind. Dann müssen alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

Faktoren des konstanten Terms a_0 *sein.*

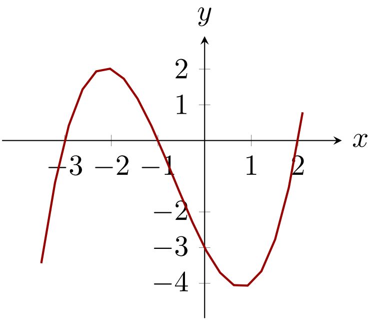
Zerlege folgende Polynome:

- $-x^3 + 4x^2 - x - 6$
- $\frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x - 1 = 0$

Polynome

Funktionen einer Variablen (Kapitel 4)

Bestimme das zu folgendem Graphen gehörende Polynom :



Berechne:

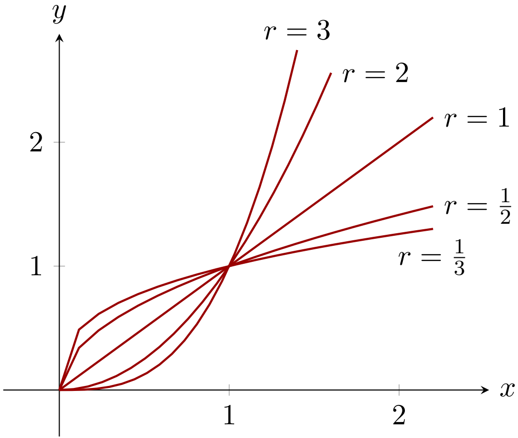
- $(x^2 - x - 20) \div (x - 5)$
- $(-3x^3 + 48x) \div (x - 4)$

Funktionen einer Variablen (Kapitel 4)

Potenzfunktionen

Funktionen einer Variablen (Kapitel 4)

$$f(x) = x^r$$

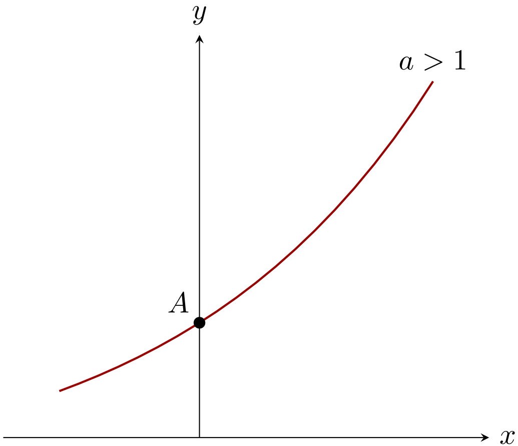


Funktionen einer Variablen (Kapitel 4)

Exponentialfunktionen

Funktionen einer Variablen (Kapitel 4)

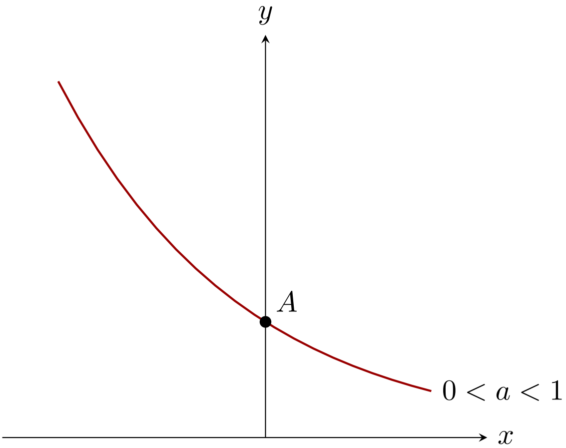
$$f(x) = Aa^x$$



Exponentialfunktionen

Funktionen einer Variablen (Kapitel 4)

$$f(x) = Aa^x$$



Exponentialfunktionen

Funktionen einer Variablen (Kapitel 4)

Anwendung:

- wirtschaftliches Wachstum
- Bevölkerungswachstum
- stetig angehäufter Zins
- radioaktiver Zerfall
- Statistik

Bevölkerungswachstum in Zimbabwe

70er und 80er Jahre: Wachstum in Zimbabwe $\approx 3.5\%$ jährlich.

1969: $t = 0$, $P(t = 0) = 5.1$ Millionen.

Bevölkerung nach t Jahren:

$$P(t) = 5.1 \cdot 1.035^t$$

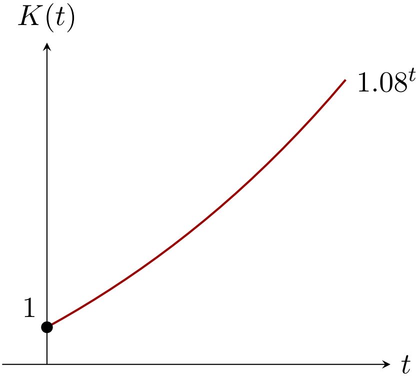
Verdoppelungszeit der Bevölkerung ist ungefähr 20 Jahre.

Zinseszins

Sparkonto mit Startkapital von K_0 und jährlichem Zins von p%
wächst in t Jahren auf

$$K(t) = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$$

1 Euro zu 8% p.a.:



Natürliche Exponentialfunktion

Die natürliche Exponentialfunktion hat die Basis e

$$e \approx 2.718281828459045$$

also

$$f(x) = e^x = \exp(x)$$

Rechenregeln

Funktionen einer Variablen (Kapitel 4)

$$e^s \cdot e^t = e^{s+t}$$

$$\frac{e^s}{e^t} = e^{s-t}$$

$$(e^s)^t = e^{st}$$

Funktionen einer Variablen (Kapitel 4)

Der Logarithmus ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Sie löst die Gleichung

$$a^x = b$$

nach x auf. Beispiel mit Basis e: $e^x = 4 \Leftrightarrow \log_e 4 \Leftrightarrow \ln 4$.

Falls

$$e^u = b,$$

dann heisst u der natürliche Logarithmus von b. Wir schreiben

$$u = \ln b.$$

Es gilt also $e^{\ln b} = b$.

Beachte: $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$ und $\ln(1/e) = -1$.

Rechenregeln

Funktionen einer Variablen (Kapitel 4)

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

$$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$$

$$\ln x^p = p \ln x$$

Beispiel: Löse $\ln\left(A\alpha e^{-\alpha x}\right) = \ln k$ nach x auf.

Beispiel: Verdoppelungszeit

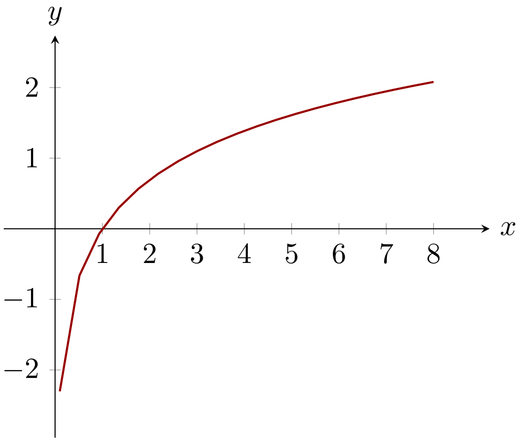
(Siehe auch Bevölkerungswachstum von Zimbabwe)

Die Verdoppelungszeit ist die Zeit t^* die verstreichen muss, bis sich $f(t) = Aa^t$ verdoppelt.

t^* erfüllt also die Gleichung $a^{t^*} = 2$. Löse diese Gleichung nach t^* auf:

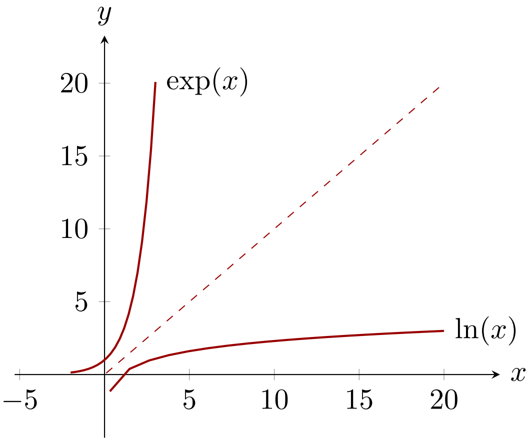
$$a^{t^*} = 2 \Leftrightarrow t^* = \frac{\ln 2}{\ln a}$$

Logarithmusfunktionen



Logarithmusfunktionen

Funktionen einer Variablen (Kapitel 4)



Logarithmusfunktionen

Funktionen einer Variablen (Kapitel 4)

Allgemein: Wenn

$$a^u = x$$

dann heisst u der Logarithmus von x zur Basis a. Wir schreiben

$$u = \log_a x$$

Da $a^{\log_a x} = x$ folgt durch bilden des natürlichen Logarithmus auf beiden Seiten der Gleichung:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Mit diesem Vorgehen kann somit die Basis des Logarithmus gewechselt werden (Basiswechsel)