Repetition mathematische Grundlagen (Kapitel 1 bis 3)

1. Drücken sie folgende Ausdrücke als reale Zahlen in Dezimalpunktnotation aus:

   (a) 5^5 (b) 10^{-3} (c) $\frac{1}{3^{-3}}$ (d) $\frac{-1}{10^{-3}}$

   (e) $3^{-2}3^3$ (f) $(3^{-2})^{-3}$ (g) $-\left(\frac{5}{3}\right)^0$ (h) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$

2. Vereinfachen sie:

   (a) $(2^3 2^{-5})^3$ (b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} - \left(\frac{4}{3}\right)^{-1}$ (c) $(3^{-2} - 5^{-1})^{-1}$ (d) $(1.12)^{-3}(1.12)^3$

   (e) $\left[\left(\frac{x}{2}\right)^3 \cdot \frac{8}{x^{-2}}\right]^{-3}$ (f) $\frac{24x^3y^2z^3}{4x^2yz^2}$ (g) $\frac{a^5 \cdot a^3 \cdot a^{-2}}{a^{-3} \cdot a^6}$ (h) $\left[-(-ab^3)^{-3}(a^6b^6)^2\right]^3$

3. Ausmultiplizieren:

   (a) $a(a-1)$ (b) $(x-3)(x+7)$ (c) $-\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{6})$ (d) $(1-\sqrt{2})^2$

   (e) $(x-1)^3$ (f) $(1-b^2)(1+b^2)$ (g) $(1+x+x^2+x^3)(1-x)$

   (h) $(1+x)^4$

4. Ausklammern:

   (a) $5(x+2y)+a(x+2y)$ (b) $(a+b)c-d(a+b)$ (c) $ax+ay+2x+2y$

   (d) $2x^2-5yz+10xz-xy$ (e) p^2-q^2+p-q (f) $u^3+v^3-u^2v-v^2u$

5. Ohne Taschenrechner ausrechnen:

   (a) $16^{1/4}$ (b) $243^{-1/5}$ (c) $5^{1/7}5^{6/7}$ (d) $(4^8)^{-3/16}$

   (e) $64^{1/3}+\sqrt[3]{125}$ (f) $(-8/27)^{2/3}$ (g) $(-1/8)^{-2/3}+(1/27)^{-2/3}$

   (h) $\frac{1000^{-2/3}}{\sqrt[3]{5^{-3}}}$

6. Lösen sie die folgenden Ungleichungen

   (a) $2(x-4)<5$ (b) $\frac{1}{3}(y-3)+4 \geq 2$ (c) $8-0.2x \leq \frac{4-0.1x}{0.5}$

   (d) $\frac{x-1}{-3} > \frac{-3x+8}{-5}$ (e) $|5-3x| \leq 8$ (f) $|x^2-4| \leq 2$

7. Stellen sie sich zwei Stück Schnur vor: ein langes und ein kürzeres. Sie wissen, dass die Längendifferenz 63cm beträgt und die Summe der Längen 1m95cm ergibt. Wie lang sind die beiden Stücke? Geben Sie allgemeine Formeln für die Berechnung der Schnurlängen für den Fall an, dass sie die Differenz der Längen und die Summe der Längen kennen.

8. Zeigen sie: aus $a+b>0$ und $a>b$ folgt $a^2>b^2$

9. Beweisen sie (i) $|ab|=|a|\cdot|b|$ und $|a+b| \leq |a|+|b|$ für beliebige reale Zahlen a und b.

10. Betrachten sie ein gleichseitiges Dreieck und einen beliebigen Punkt P innerhalb des Dreiecks. Bezeichnen sie mit h_1, h_2 und h_3 die kürzestes Distanz von P zu jeder der drei Seiten des Dreiecks. Zeigen sie, dass $h_1 + h_2 + h_3$ unabhängig von der Wahl des Punktes P ist. (*Hinweis:* Berechnen sie die Fläche des Dreiecks als die Summe der Flächen von drei Dreiecken)

11. Lösen sie die folgenden Gleichungen nach der angegebenen Variablen auf:

    (a) $\frac{x-3}{x-4} = \frac{x+3}{x+4}$ nach x
    (b) $\frac{3(x+3)}{x-3} - 2 = 9\frac{x}{x^2-9} + \frac{27}{(x+3)(x-3)}$ nach x
    (c) $x = \frac{2}{3}(y-3) + y$ nach y
    (d) $AK\sqrt{L} = Y_0$ nach L
    (e) $px + qy = m$ nach y
    (f) $Px(Px+Q)^{-1/3} + (Px+Q)^{2/3} = 0$ nach x
    (g) $3K^{-1/2}L^{1/3} = \frac{1}{5}$ nach K
    (h) $[(1-\lambda)a^{-\rho} + \lambda b^{-\rho}]^{-1/\rho} = c$ nach b
    (i) $(x^2-4)\sqrt{5-x} = 0$ nach x
    (j) $(x^4+1)(4+x) = 0$ nach x

12. Lösen sie die folgenden Gleichungssysteme:

    (a) $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 4$ und $\frac{3}{x} - \frac{2}{y} = 19$
    (b) $3\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 2$ und $2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = \frac{1}{4}$
    (c) $x^2 + y^2 = 13$ und $4x^2 - 3y^2 = 24$

13. Berechnen sie:

    (a) $\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{i(i+2)}$
    (b) $\sum_{j=5}^{9} (2j-8)^2$
    (c) $\sum_{k=1}^{5} \frac{k-1}{k+1}$
    (d) $\sum_{n=2}^{5} (n-1)^2(n+2)$
    (e) $\sum_{k=1}^{5} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$
    (f) $\sum_{i=-2}^{3} (i+3)^i$

14. Gegeben: $A = \{1,3,4\}$, $B = \{1,4,6\}$, $C = \{2,4,3\}$ und $D = \{1,5\}$. Finden sie:

    (a) $A \cap B$
    (b) $A \cup B$
    (c) $A \backslash B$
    (d) $B \backslash A$
    (e) $(A \cup B) \backslash (A \cap B)$
    (f) $A \cup B \cup C \cup C \cup D$
    (g) $A \cap B \cap C$
    (h) $A \cap B \cap C \cap D$

15. Berechnen sie die Summen

    (a) $R = 3 + 5 + 7 + \cdots + 197 + 199 + 201$
    (b) $S = 1001 + 2002 + 3003 + \cdots + 8008 + 9009 + 10010$

16. (a) Beweisen sie $(1+x)^2 \geq 1 + 2x$ für alle x.
    (b) Beweisen sie $(1+x)^3 \geq 1 + 3x$ für alle $x \geq -3$.
    (c) Beweisen sie via Induktion: für alle natürlichen Zahlen n und alle $x \geq -1$ gilt:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$